Autour des mécanismes de correction de fonctions de croyance, des décompositions canoniques et de l'association d'objets

David Mercier

Laboratoire de Génie Informatique et d'Automatique de l'Artois (LGI2A)

Séminaire LAGIS
9 juillet 2010

LGI2A
UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Plan

1. Mécanismes de correction de fonctions de croyance
2. Décompositions canoniques d'une fonction de croyance et affaiblissement contextuel
3. Association d'objets avec des fonctions de croyance

Plan

1. Mécanismes de correction de fonctions de croyance
2. Décompositions canoniques d'une fonction de croyance et affaiblissement contextuel
3. Association d'objets avec des fonctions de croyance

Mécanismes de correction / ajustement 1/2

Agent *Ag*

Cherche la valeur d'une variable d'intérêt $\boldsymbol{X}$ à valeurs dans $\boldsymbol{\Omega}$

m_S^Ω

Source *S*

Fournit une information à *Ag* sur cette valeur - sous la forme m_S^Ω -

Mécanismes de correction / ajustement 1/2

Agent *Ag*

Cherche la valeur d'une variable d'intérêt $\boldsymbol{X}$ à valeurs dans $\boldsymbol{\Omega}$

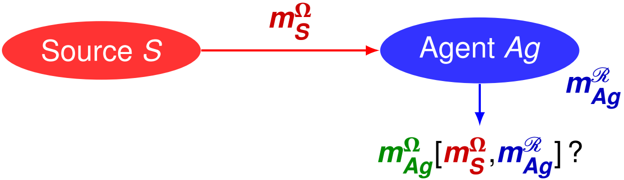
Connaissances sur *S* : fiabilité, prudence, honnêteté, …

m_S^{Ω}

Source *S*

Fournit une information à *Ag* sur cette valeur - sous la forme m_S^{Ω}-

Mécanismes de correction / ajustement 2/2



Definition

*Un mécanisme de correction est un mécanisme qui permet à un agent **Ag** de prendre en compte l’information fournie par une source **S** ainsi que sa méta-connaissance sur **S**.*

LGI2A

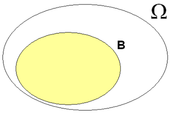
UNIVERSITÉ D’ARTOIS

Quelques notations

Cadre de discernement : $\mathbf{\Omega} = \{\omega_1, \ldots, \omega_k, \ldots, \omega_K\}$.

Fonction de masse catégorique sur $B \subseteq \Omega$ est notée m_B et vérifie :

$$m_B(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } A = B \,, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



Fonction de masse vide : la fonction de masse catégorique sur Ω (m_Ω)

Concepts utilisés

Principe du minimum d'information : parmi un ensemble de fonctions de croyance compatibles avec une information, choisir la moins informative.

Concepts utilisés

Principe du minimum d'information : parmi un ensemble de fonctions de croyance compatibles avec une information, choisir la moins informative.

Marginalisation et **extension vide** sur un espace produit :

- Marginalisation de $m^{\Omega\times\Theta}$ sur Ω :
  $$m^{\Omega\times\Theta\downarrow\Omega}(A) = \sum_{\{\mathrm{Proj}(B\downarrow\Omega)=A\}} m^{\Omega\times\Theta}(B) \;, \forall A \subseteq \Omega \;.$$
- Extension vide de m^{Ω} sur $\Omega\times\Theta$:
  $$m^{\Omega\uparrow\Omega\times\Theta}(B) = \begin{cases} m^{\Omega}(A) & \text{si } B = A\times\Theta,\ A\subseteq\Omega \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Concepts utilisés

Principe du minimum d'information : parmi un ensemble de fonctions de croyance compatibles avec une information, choisir la moins informative.

Marginalisation et **extension vide** sur un espace produit :

- Marginalisation de $m^{\Omega\times\Theta}$ sur Ω :
$$m^{\Omega\times\Theta\downarrow\Omega}(A)=\sum_{\{\mathrm{Proj}(B\downarrow\Omega)=A\}} m^{\Omega\times\Theta}(B)\ ,\ \forall A\subseteq\Omega\ .$$
- Extension vide de m^{Ω} sur $\Omega\times\Theta$:
$$m^{\Omega\uparrow\Omega\times\Theta}(B)=\begin{cases} m^{\Omega}(A) & \text{si } B=A\times\Theta,\ A\subseteq\Omega\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Déconditionnement sur sur un espace produit :

- Déconditionnement de $m^{\Omega}[\theta]$ sur $\Omega\times\Theta$:
$$m^{\Omega}[\theta]^{\Uparrow\Omega\times\Theta}(A\times\theta\cup\Omega\times\overline{\theta})=m^{\Omega}[\theta](A).$$

Mécanismes de correction

Un exemple : opération d'affaiblissement ou discounting (Shafer, 1976)

$$\text{Source } S \xrightarrow{\boldsymbol{m}_S^{\Omega}} \text{Agent } Ag$$

$$\mathscr{R} = \{F, NF\}$$

$$\boldsymbol{m}_{Ag}^{\mathscr{R}}(\{F\}) = 1 - \alpha$$

$$\boldsymbol{m}_{Ag}^{\mathscr{R}}(\mathscr{R}) = \alpha$$

Source fiable (***F***) ou non fiable (***NF***), $\mathscr{R} = \{F, NF\}$, $\alpha \in [0, 1]$.

- $m_{Ag}^{\Omega}[\{F\}] = m_S^{\Omega} = m$
- $m_{Ag}^{\Omega}[\{NF\}] =$ m_{Ω} telle que $m_{\Omega}(\Omega) = 1$

Mécanismes de correction

Un exemple : opération d'affaiblissement ou discounting (Shafer, 1976)

$$\text{Source } S \xrightarrow{\boldsymbol{m_S^\Omega}} \text{Agent } Ag$$

$\mathscr{R} = \{F, NF\}$

$\boldsymbol{m_{Ag}^{\mathscr{R}}}(\{F\}) = 1 - \alpha$

$\boldsymbol{m_{Ag}^{\mathscr{R}}}(\mathscr{R}) = \alpha$

Source fiable (***F***) ou non fiable (***NF***), $\mathscr{R} = \{F, NF\}$, $\alpha \in [0,1]$.

- $m_{Ag}^{\Omega}[\{F\}] = m_S^{\Omega} = m$
- $m_{Ag}^{\Omega}[\{NF\}] =$ m_Ω telle que $m_\Omega(\Omega) = 1$

Calcul :

- $\boldsymbol{m_{Ag}^{\Omega}}[\boldsymbol{m_S^{\Omega}}, \boldsymbol{m_{Ag}^{\mathscr{R}}}] = \left(m_{Ag}^{\Omega}[\{F\}]^{\Uparrow \Omega \times \mathscr{R}} \circledcap m_{Ag}^{\Omega}[\{NF\}]^{\Uparrow \Omega \times \mathscr{R}} \circledcap m_{Ag}^{\mathscr{R} \uparrow \Omega \times \mathscr{R}} \right)^{\downarrow \Omega}$

LGI2A

UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Mécanismes de correction

Un exemple : opération d'affaiblissement ou discounting (Shafer, 1976)

Source S $\xrightarrow{\boldsymbol{m_S^\Omega}}$ Agent Ag

$\mathscr{R} = \{F, NF\}$

$\boldsymbol{m_{Ag}^{\mathscr{R}}}(\{F\}) = 1 - \alpha$

$\boldsymbol{m_{Ag}^{\mathscr{R}}}(\mathscr{R}) = \alpha$

Source fiable (***F***) ou non fiable (***NF***), $\mathscr{R} = \{F, NF\}$, $\alpha \in [0,1]$.

- $m_{Ag}^{\Omega}[\{F\}] = m_S^{\Omega} = m$
- $m_{Ag}^{\Omega}[\{NF\}] =$ m_Ω telle que $m_\Omega(\Omega) = 1$

Calcul :

- $\boldsymbol{m_{Ag}^{\Omega}}[\boldsymbol{m_S^{\Omega}}, \boldsymbol{m_{Ag}^{\mathscr{R}}}] = \left(m_{Ag}^{\Omega}[\{F\}]^{\Uparrow \Omega \times \mathscr{R}} \circledcap m_{Ag}^{\Omega}[\{NF\}]^{\Uparrow \Omega \times \mathscr{R}} \circledcap m_{Ag}^{\mathscr{R} \uparrow \Omega \times \mathscr{R}} \right)^{\downarrow \Omega}$

Résultat (Smets, 1993) :

- $m_{Ag}^{\Omega} = {}^{\alpha}m = (1-\alpha)m + \alpha\, m_\Omega$

Une famille de mécanismes de correction

Une généralisation du modèle précédent

$$\text{Source } S \xrightarrow{\boldsymbol{m_S^\Omega}} \text{Agent } Ag$$

$\mathscr{R} = \{R_1, \ldots, R_N\}$

$\boldsymbol{m_{Ag}^{\mathscr{R}}}(\{R_i\}) = \nu_i, \ \forall i$

Généralisation :

- Source dans N états possibles R_i, $i \in \{1, \ldots, N\}$, $\mathscr{R} = \{R_1, \ldots, R_N\}$.
- Interprétation état donnée par une transformation m_i de m :

  $$m_{Ag}^{\Omega}[\{R_i\}] = m_i = f(m)$$

- $m_{Ag}^{\mathscr{R}}(\{R_i\}) = \nu_i, \ \forall i \in \{1, \ldots, N\}$, avec $\sum_{i=1}^{N} \nu_i = 1$.

LGI2A
UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Une famille de mécanismes de correction

Une généralisation du modèle précédent

$$\text{Source } S \xrightarrow{\;\boldsymbol{m}_S^{\boldsymbol{\Omega}}\;} \text{Agent } Ag$$

$$\mathscr{R} = \{R_1, \ldots, R_N\}$$

$$\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{Ag}}^{\mathscr{R}}(\{R_i\}) = \nu_i,\ \forall i$$

La connaissance de *Ag* peut être calculée :

- déconditionnement de $m_{Ag}^{\Omega}[\{R_i\}]$ sur l'espace produit $\Omega \times \mathscr{R}$;
- extension vide de $m_{Ag}^{\mathscr{R}}$ sur le même espace produit $\Omega \times \mathscr{R}$;
- application de la règle de combinaison conjonctive (RCC) ;
- marginalisation du résultat sur Ω.

Formellement :

$$m_{Ag}^{\Omega}\,[\boldsymbol{m}_S^{\boldsymbol{\Omega}}, \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{Ag}}^{\mathscr{R}}] = \left(\textcircled{$\cap$}_{i=1}^{N}\, m_{Ag}^{\Omega}[\{R_i\}]^{\Uparrow \Omega \times \mathscr{R}} \;\textcircled{$\cap$}\; m_{Ag}^{\mathscr{R}\uparrow \Omega \times \mathscr{R}} \right)^{\downarrow \Omega}.$$

Une famille de mécanismes de correction

Une généralisation du modèle précédent

$$\text{Source } S \xrightarrow{\boldsymbol{m_S^\Omega}} \text{Agent } Ag$$

$\mathscr{R} = \{R_1, \ldots, R_N\}$

$\boldsymbol{m_{Ag}^{\mathscr{R}}}(\{R_i\}) = \nu_i, \; \forall i$

La connaissance de *Ag* peut être calculée :

- déconditionnement de $m_{Ag}^{\Omega}[\{R_i\}]$ sur l'espace produit $\Omega \times \mathscr{R}$;
- extension vide de $m_{Ag}^{\mathscr{R}}$ sur le même espace produit $\Omega \times \mathscr{R}$;
- application de la règle de combinaison conjonctive (RCC) ;
- marginalisation du résultat sur Ω.

Formellement :

$$m_{Ag}^{\Omega}\,[\boldsymbol{m_S^\Omega}, \boldsymbol{m_{Ag}^{\mathscr{R}}}] = \left(\textcircled{\cap}_{i=1}^{N}\, m_{Ag}^{\Omega}[\{R_i\}]^{\Uparrow \Omega \times \mathscr{R}} \; \textcircled{\cap} \; m_{Ag}^{\mathscr{R} \uparrow \Omega \times \mathscr{R}} \right)^{\downarrow \Omega}.$$

Résultat, noté ${}^{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{m}$, ne dépend que des m_i et ν_i :

- $m_{Ag}^{\Omega} = {}^{\nu}m = \sum_{i=1}^{N} \nu_i\, m_i$.

Cas particuliers de cette famille

Offre une nouvelle interprétation et une justification

Le *de-discounting* (Denœux and Smets, 2006) :

- $m = \frac{{}^{\alpha}m - \alpha\, m_{\Omega}}{1-\alpha}$, avec $\alpha \in [0, m(\Omega)]$. Permet de **renforcer** une information.

UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Cas particuliers de cette famille

Offre une nouvelle interprétation et une justification

Le *de-discounting* (Denœux and Smets, 2006) :

- $m = \frac{{}^{\alpha}m - \alpha\, m_\Omega}{1-\alpha}$, avec $\alpha \in [0, m(\Omega)]$. Permet de **renforcer** une information.

L'*affaiblissement étendu* (Zhu and Basir, 2004) :

- Transformation 1 :

  $${}^{\alpha}m = (1-\alpha)m + \alpha\, m_\Omega, \text{ avec } \alpha \in \left[\frac{-m_S^\Omega(\Omega)}{1-m_S^\Omega(\Omega)}, 1\right].$$

  Permet d'**affaiblir** ou **renforcer** une information.

- Transformation 2 :

  $$\begin{cases} {}^{\alpha}m(\overline{A}) = (\alpha-1)m(A) & \text{si } A \subset \Omega, \\ {}^{\alpha}m(\Omega) = (\alpha-1)m(\Omega) + 2 - \alpha & \text{sinon} \end{cases}, \text{ avec}$$

  $\alpha \in [1, 1 + \frac{1}{1-m(\Omega)}]$.

  Permet de **contredire** une information.

LGI2A

UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Cas particuliers de cette famille

Offre une nouvelle interprétation et une justification

TABLE: Interprétations conduisant, avec une reparamétrisation, à des mécanismes connus.

Interprétations		Opération
$m_1 = m_\Omega$	$m_2 = m$	affaiblissement
$m_1 = m$	$m_2 = {}^{tr}m$	de-discounting
$m_1 = m_\Omega$	$m_2 = {}^{tr}m$	affaiblissement étendu (1)
$m_1 = \overline{{}^{tr}m}$	$m_2 = m_\Omega$	affaiblissement étendu (2)

Avec ${}^{tr}m$: fonction de masse *m totalement renforcé*

$$
{}^{tr}m(A) = \begin{cases} \frac{m(A)}{1-m(\Omega)} & \forall A \subset \Omega, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}
$$

Et : $\overline{m}(A) = m(\overline{A}), \forall A \subseteq \Omega$.

LGI2A

UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Mécanisme de correction contextuelle

Allons encore plus loin dans la généralisation des modèles précédents

Source S $\xrightarrow{m_S^{\Omega}}$ Agent Ag

$\mathscr{R} = \{R_1, \ldots, R_N\}$

$m_{Ag}^{\mathscr{R}}[A](\{R_i\}) = \nu_i, \ \forall i$ et $\forall A \subseteq \Omega$

La (méta)connaissance sur la source peut dépendre de la valeur recherchée.

Mécanisme de correction contextuelle

Allons encore plus loin dans la généralisation des modèles précédents

$\mathscr{R} = \{R_1, \ldots, R_N\}$

$m_{Ag}^{\mathscr{R}}[A](\{R_i\}) = \nu_i, \ \forall i$ et $\forall A \subseteq \Omega$

La (méta)connaissance sur la source peut dépendre de la valeur recherchée.

... Under works ...

Affaiblissement contextuel sur un grossissement $\Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_L\}$ de Ω

Une autre généralisation de l'affaiblissement classique

$$\text{Source } S \xrightarrow{\;m_S^\Omega\;} \text{Agent } Ag$$

$\mathcal{R} = \{F, NF\}$

$m_{Ag}^{\mathcal{R}}[\theta_\ell](\{F\}) = 1 - \alpha_\ell = \beta_\ell$

$m_{Ag}^{\mathcal{R}}[\theta_\ell](\mathcal{R}) = \alpha_\ell \in [0, 1]$

La fiabilité de la source peut dépendre de la valeur recherchée.

Affaiblissement contextuel sur un grossissement $\Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_L\}$ de Ω

Une autre généralisation de l'affaiblissement classique

$$\text{Source } S \xrightarrow{\boldsymbol{m_S^\Omega}} \text{Agent } Ag$$

$\mathcal{R} = \{F, NF\}$

$\boldsymbol{m_{Ag}^{\mathcal{R}}}[\theta_\ell](\{F\}) = 1 - \alpha_\ell = \beta_\ell$

$\boldsymbol{m_{Ag}^{\mathcal{R}}}[\theta_\ell](\mathcal{R}) = \alpha_\ell \in [0,1]$

La fiabilité de la source peut dépendre de la valeur recherchée.

Calcul de la connaissance de l'agent Ag :

- $\boldsymbol{m_{Ag}^{\Omega}}[\boldsymbol{m_S^\Omega}, \boldsymbol{m_{Ag}^{\mathcal{R}}}] = \left(\textcircled{\cap}_{\ell=1}^{L} m_{Ag}^{\mathcal{R}}[\theta_\ell]^{\Uparrow \Omega \times \mathcal{R}} \textcircled{\cap} m_{Ag}^{\Omega}[\{F\}]^{\Uparrow \Omega \times \mathcal{R}} \right)^{\downarrow \Omega}$.

Affaiblissement contextuel sur un grossissement $\Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_L\}$ de Ω

Une autre généralisation de l'affaiblissement classique

$\mathcal{R} = \{F, NF\}$

$m_{Ag}^{\mathcal{R}}[\theta_\ell](\{F\}) = 1 - \alpha_\ell = \beta_\ell$

$m_{Ag}^{\mathcal{R}}[\theta_\ell](\mathcal{R}) = \alpha_\ell \in [0,1]$

La fiabilité de la source peut dépendre de la valeur recherchée.

Calcul de la connaissance de l'agent Ag :

- $m_{Ag}^{\Omega}[m_S^\Omega, m_{Ag}^{\mathcal{R}}] = \left(\bigcirc\!\!\!\!\cap_{\ell=1}^{L} m_{Ag}^{\mathcal{R}}[\theta_\ell]^{\Uparrow \Omega \times \mathcal{R}} \bigcirc\!\!\!\!\cap\, m_{Ag}^{\Omega}[\{F\}]^{\Uparrow \Omega \times \mathcal{R}} \right)^{\downarrow \Omega}$.

Resultat (Mercier, Quost, Denœux 2008) :

- $m_{Ag}^{\Omega} = {}^{\alpha}m = m \bigcirc\!\!\!\!\cup\, \theta_{1_{\beta_1}} \bigcirc\!\!\!\!\cup \ldots \bigcirc\!\!\!\!\cup\, \theta_{L_{\beta_L}}$

  où $\theta_{\ell_{\beta_\ell}}$: *fonction de masse simple négative* $\begin{cases} \emptyset \mapsto \beta_\ell \\ \theta_\ell \mapsto 1 - \beta_\ell \end{cases}$

Plan

1. Mécanismes de correction de fonctions de croyance
2. Décompositions canoniques d'une fonction de croyance et affaiblissement contextuel
3. Association d'objets avec des fonctions de croyance

LGI2A
UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Plan

1. Mécanismes de correction de fonctions de croyance
2. Décompositions canoniques d'une fonction de croyance et affaiblissement contextuel
3. Association d'objets avec des fonctions de croyance

LGI2A
UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Quelques définitions

- Fonction de masse simple (SBBA) :

  Pas plus de deux éléments focaux, Ω inclus.

  Exemple : $m(\{\omega_1\}) = .2$ et $m(\Omega) = .8$.

Quelques définitions

- Fonction de masse simple (SBBA) :

  Pas plus de deux éléments focaux, Ω inclus.
  Exemple : $m(\{\omega_1\}) = .2$ et $m(\Omega) = .8$.
  Notation pratique : $m = \boldsymbol{A^w}$ t.q $m = \begin{cases} A \mapsto 1 - w \\ \Omega \mapsto w \end{cases}$
  $\boldsymbol{w}$ = poids d'incertitude

Quelques définitions

- **Fonction de masse simple (SBBA) :**

  Pas plus de deux éléments focaux, Ω inclus.

  Exemple : $m(\{\omega_1\}) = .2$ et $m(\Omega) = .8$.

  Notation pratique : $m = \boldsymbol{A^w}$ t.q $m = \begin{cases} A \mapsto 1 - w \\ \Omega \mapsto \quad w \end{cases}$

  $\boldsymbol{w}$ = poids d'incertitude

  Exemple : $m = \{\omega_1\}^{.8}$.

LGI2A

UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Quelques définitions

- Fonction de masse simple (SBBA) :

  Pas plus de deux éléments focaux, Ω inclus.
  Exemple : $m(\{\omega_1\}) = .2$ et $m(\Omega) = .8$.
  Notation pratique : $m = \boldsymbol{A^w}$ t.q $m = \begin{cases} A \mapsto 1 - w \\ \Omega \mapsto \quad w \end{cases}$
  $\boldsymbol{w}$ = poids d'incertitude
  Exemple : $m = \{\omega_1\}^{.8}$.
  Avantage : $A^{w_1} \cap A^{w_2} = A^{w_1 \cdot w_2}$

LGI2A
UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Quelques définitions

- Fonction de masse simple (SBBA) :

  Pas plus de deux éléments focaux, Ω inclus.
  Exemple : $m(\{\omega_1\}) = .2$ et $m(\Omega) = .8$.
  Notation pratique : $m = \boldsymbol{A^w}$ t.q $m = \begin{cases} A \mapsto 1 - w \\ \Omega \mapsto \quad w \end{cases}$
  $\boldsymbol{w}$ = poids d'incertitude
  Exemple : $m = \{\omega_1\}^{.8}$.
  Avantage : $A^{w_1} \textcircled{$\cap$} A^{w_2} = A^{w_1 \cdot w_2}$

- Negation :

  $\overline{m}(A) = m(\overline{A})$, pour tout $A \subseteq \Omega$.

Quelques définitions

- Fonction de masse simple (SBBA) :

  Pas plus de deux éléments focaux, Ω inclus.
  Exemple : $m(\{\omega_1\}) = .2$ et $m(\Omega) = .8$.
  Notation pratique : $m = \boldsymbol{A^w}$ t.q $m = \begin{cases} A \mapsto 1 - w \\ \Omega \mapsto \quad w \end{cases}$
  $\boldsymbol{w}$ = poids d'incertitude
  Exemple : $m = \{\omega_1\}^{.8}$.
  Avantage : $A^{w_1} \bigcirc\!\!\!\!\cap\, A^{w_2} = A^{w_1 \cdot w_2}$

- Negation :

  $\overline{m}(A) = m(\overline{A})$, pour tout $A \subseteq \Omega$.

- Une fonction de masse m est dite :

  dogmatique si $m(\Omega) = 0$;
  non-dogmatique (NDBBA) si $m(\Omega) > 0$;
  normale si $m(\emptyset) = 0$;
  sous-normale (SNBBA) si $m(\emptyset) > 0$.

LGI2A
UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Décomposition canonique conjonctive (Ph. Smets) [1]

- Toute fonction de masse m **non-dogmatique** peut être **uniquement décomposée** en une **combinaison conjonctive** de fonctions de masse simples généralisées (GSBBAs) $A^{w(A)}$:

$$m = \textcircled{\cap}_{A \subset \Omega} A^{w(A)}$$

avec

$$A^{w(A)} : \begin{array}{ccl} \Omega & \mapsto & w(A) \\ A & \mapsto & 1 - w(A) \\ B & \mapsto & 0 \ , \ \forall B \in 2^\Omega \setminus \{A, \Omega\} \ , \end{array}$$

$A^{w(A)}$ définie de 2^Ω dans $\mathbb{R}$, $w(A) \in]0, \infty[$.

1. Ph. Smets, *The canonical decomposition of a weighted belief, IJCAI'95, 1995.*

Décomposition canonique conjonctive (Ph. Smets) [1]

- Toute fonction de masse m **non-dogmatique** peut être **uniquement décomposée** en une **combinaison conjonctive** de fonctions de masse simples généralisées (GSBBAs) $A^{w(A)}$:

$$m = \textcircled{\cap}_{A \subset \Omega} A^{w(A)}$$

avec

$$A^{w(A)} : \begin{array}{ccl} \Omega & \mapsto & w(A) \\ A & \mapsto & 1 - w(A) \\ B & \mapsto & 0 \ , \ \forall B \in 2^{\Omega} \setminus \{A, \Omega\} \ , \end{array}$$

$A^{w(A)}$ définie de 2^{Ω} dans $\mathbb{R}$, $w(A) \in]0, \infty[$.

- Fonction de poids conjonctifs w : $2^{\Omega} \setminus \{\Omega\} \to]0, \infty[$: une autre représentation d'une NDBBA.

1. Ph. Smets, *The canonical decomposition of a weighted belief, IJCAI'95, 1995.*

Décomposition canonique disjonctive (T. Denœux) [2]

- Si m est **sous-normale**, $\overline{m}$ peut aussi être conjonctivement décomposée :

$$\overline{m} = \textcircled{\cap}_{A \subset \Omega} A^{\overline{w}(A)} \Rightarrow m = \overline{\textcircled{\cap}_{A \subset \Omega} A^{\overline{w}(A)}} = \textcircled{\cup}_{A \supset \emptyset} A_{\overline{w}(\overline{A})} .$$

2. T. Denœux. *Conjunctive and Disjunctive Combination of Belief Functions Induced by Non Distinct Bodies of Evidence, Artificial Intelligence, 2008.*

Décomposition canonique disjonctive (T. Denœux) [2]

- Si m est **sous-normale**, $\overline{m}$ peut aussi être conjonctivement décomposée :

$$\overline{m} = \bigcirc\!\!\!\!\cap_{A\subset\Omega} A^{\overline{w}(A)} \Rightarrow m = \overline{\bigcirc\!\!\!\!\cap_{A\subset\Omega} A^{\overline{w}(A)}} = \bigcirc\!\!\!\!\cup_{A\supset\emptyset} A_{\overline{w}(\overline{A})} .$$

- Fonction de poids disjonctifs : $v(A) = \overline{w}(\overline{A})\ \forall A \neq \emptyset$.
- Toute fonction de masse m **sous-normale** peut être **uniquement décomposée** en une **combinaison disjonctive** de GSBBAs négatives (NGSBBAs) $A_{v(A)}$:

$$m = \bigcirc\!\!\!\!\cup_{A\supset\emptyset} A_{v(A)}$$

$$A_{v(A)} : \begin{array}{ccl} \emptyset & \mapsto & v(A) \\ A & \mapsto & 1 - v(A) \\ B & \mapsto & 0 ,\ \forall B \in 2^{\Omega} \setminus \{\emptyset, A\} , \end{array}$$

2. T. Denœux. *Conjunctive and Disjunctive Combination of Belief Functions Induced by Non Distinct Bodies of Evidence, Artificial Intelligence, 2008.*

Affaiblissement contextuel sur un grossissement $\Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_L\}$ de Ω

$\mathcal{R} = \{F, NF\}$

$m_{Ag}^{\mathcal{R}}[\theta_\ell](\{F\}) = 1 - \alpha_\ell = \beta_\ell$

$m_{Ag}^{\mathcal{R}}[\theta_\ell](\mathcal{R}) = \alpha_\ell \in [0,1]$

La fiabilité de la source peut dépendre de la valeur recherchée.

Calcul de la connaissance de l'agent Ag :

- $m_{Ag}^\Omega[m_S^\Omega, m_{Ag}^{\mathcal{R}}] = \left(\textcircled{\cap}_{\ell=1}^{L} m_{Ag}^{\mathcal{R}}[\theta_\ell]^{\Uparrow \Omega \times \mathcal{R}} \textcircled{\cap} m_{Ag}^\Omega[\{F\}]^{\Uparrow \Omega \times \mathcal{R}} \right)^{\downarrow \Omega}$.

Resultat (Mercier, Quost, Denœux 2008) :

- $m_{Ag}^\Omega = {}^\alpha m = m \textcircled{\cup} \theta_{1_{\beta_1}} \textcircled{\cup} \ldots \textcircled{\cup} \theta_{L_{\beta_L}}$

Si m est sous-normale : ${}^\alpha m = \textcircled{\cup}_{A \supset \emptyset} A_{v(A)} \textcircled{\cup} \theta_{1_{\beta_1}} \textcircled{\cup} \ldots \textcircled{\cup} \theta_{L_{\beta_L}}$

Affaiblissement contextuel (forme générale)

$$\text{Source } S \xrightarrow{\;m_S^{\Omega}\;} \text{Agent } Ag$$

$\mathcal{R} = \{R, NR\}$

$m_{Ag}^{\mathcal{R}}[A](\{R\}) = 1 - \alpha_A = \beta_A$

$m_{Ag}^{\mathcal{R}}[A](\mathcal{R}) = \alpha_A \in [0,1]$

Calcul de la connaissance de l'agent Ag :

- $m_{Ag}^{\Omega}[m_S^{\Omega}, m_{Ag}^{\mathcal{R}}] = \left(\textcircled{\cap}_{A \subseteq \Omega} m_{Ag}^{\mathcal{R}}[A]^{\Uparrow \Omega \times \mathcal{R}} \,\textcircled{\cap}\, m_{Ag}^{\Omega}[\{R\}]^{\Uparrow \Omega \times \mathcal{R}} \right)^{\downarrow \Omega}$.

Affaiblissement contextuel (forme générale)

$\mathcal{R} = \{R, NR\}$

$\boldsymbol{m_{Ag}^{\mathcal{R}}}[A](\{R\}) = 1 - \alpha_A = \beta_A$

$\boldsymbol{m_{Ag}^{\mathcal{R}}}[A](\mathcal{R}) = \alpha_A \in [0, 1]$

Calcul de la connaissance de l'agent Ag :

- $\boldsymbol{m_{Ag}^{\Omega}}[\boldsymbol{m_S^\Omega}, \boldsymbol{m_{Ag}^{\mathcal{R}}}] = \left(\bigcirc\!\!\!\!\cap_{A \subseteq \Omega} m_{Ag}^{\mathcal{R}}[A]^{\Uparrow \Omega \times \mathcal{R}} \bigcirc\!\!\!\!\cap\, m_{Ag}^{\Omega}[\{R\}]^{\Uparrow \Omega \times \mathcal{R}} \right)^{\downarrow \Omega}$.

Résultat (Mercier, Lefèvre, Delmotte, 2010) :

- $m_{Ag}^{\Omega} = {}^{\boldsymbol{\alpha}} m = \boldsymbol{m} \bigcirc\!\!\!\!\cup_{\boldsymbol{A} \supset \emptyset} \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\beta_A}}$.

LGI2A

UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Affaiblissement contextuel (forme générale)

$\mathscr{R} = \{R, NR\}$

$\boldsymbol{m_{Ag}^{\mathscr{R}}}\boldsymbol{[A]}(\{R\}) = 1 - \alpha_A = \beta_A$

$\boldsymbol{m_{Ag}^{\mathscr{R}}}\boldsymbol{[A]}(\mathscr{R}) = \alpha_A \in [0,1]$

Calcul de la connaissance de l'agent *Ag* :

- $\boldsymbol{m_{Ag}^\Omega}[\boldsymbol{m_S^\Omega}, \boldsymbol{m_{Ag}^{\mathscr{R}}}] = \left(\textcircled{\cap}_{A \subseteq \Omega} m_{Ag}^{\mathscr{R}}[A]^{\Uparrow \Omega \times \mathscr{R}} \textcircled{\cap} m_{Ag}^\Omega[\{R\}]^{\Uparrow \Omega \times \mathscr{R}} \right)^{\downarrow \Omega}$.

Résultat (Mercier, Lefèvre, Delmotte, 2010) :

- $m_{Ag}^\Omega = {}^{\boldsymbol{\alpha}} m = \boldsymbol{m} \textcircled{\cup}_{A \supset \emptyset} \boldsymbol{A_{\beta_A}}$.

Si *m* est sous-normale :

- ${}^{\boldsymbol{\alpha}} m = \textcircled{\cup}_{A \supset \emptyset} A_{v(A)} \textcircled{\cup} \textcircled{\cup}_{A \supset \emptyset} A_{\beta_A} = \textcircled{\cup}_{A \supset \emptyset} A_{\beta_A v(A)}$.

LGI2A
UNIVERSITÉ D'ARTOIS

En résumé

L'**affaiblissement contextuel** d'une fonction de masse sous-normale *m* est donnée par :

$$^{\boldsymbol{\alpha}}m = \textcircled{\cup}_{A \supset \emptyset} A_{\beta_A v(A)} \ .$$

En résumé

L'**affaiblissement contextuel** d'une fonction de masse sous-normale m est donnée par :

$$^{\boldsymbol{\alpha}}m = \textcircled{\scriptsize$\cup$}_{A \supset \emptyset} A_{\beta_A v(A)} \ .$$

Définition d'un **renforcement dual** : négation de l'affaiblissement contextuel de $\overline{m}$:

$$\overline{^{\boldsymbol{\alpha}}\overline{m}} = \overline{\textcircled{\scriptsize$\cup$}_{A \supset \emptyset} A_{\beta_A \overline{v}(A)}} = \textcircled{\scriptsize$\cap$}_{A \subset \Omega} A^{\beta_A w(A)} \ .$$

LGI2A

UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Exemple

Capteur devant reconnaître deux types d'objets $\Omega = \{a, b\}$

Objets de type *a* parfaitement reconnus, type *b* mal reconnu.

TABLE: Une possible matrice de confusion.

Vérité \ Décision	*a*	*b*
a	10	0
b	5	5

Exemple

Capteur devant reconnaître deux types d'objets $\Omega = \{a, b\}$

Objets de type a parfaitement reconnus, type b mal reconnu.

TABLE: Une possible matrice de confusion.

Vérité \ Décision	a	b
a	10	0
b	5	5

- Le capteur est totalement fiable dans le contexte $\{a\}$, pas du tout dans le contexte $\{b\}$: $\beta_{\{a\}} = 1$ et $\beta_{\{b\}} = 0$
- L'affaiblissement contextuel d'une masse m est alors donné par :

$$^{\alpha}m = m \circledcirc\!\!\cup \{a\}_1 \circledcirc\!\!\cup \{b\}_0 = m \circledcirc\!\!\cup \{b\}_0 \,.$$

En particulier :

- si $m(\{a\}) = 1$ alors $^{\alpha}m(\{a, b\}) = 1$,
- si $m(\{b\}) = 1$ alors $^{\alpha}m(\{b\}) = 1$.

LGI2A

UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Remarque

*Dans le modèle de l'**affaiblissement contextuel**, la définition de la fiabilité est donnée **conditionnellement à un sous-ensemble de** Ω :*

$$m^{\mathcal{R}}_{Ag}[A](\{R\}) = \beta_A \ ,$$

*et **non conditionnellement au résultat d'un processus de décision** :*

$$m^{\mathcal{R}}_{Ag}[\text{“La source a décidé } A\text{”}](\{F\}) = \beta_A \ .$$

Plan

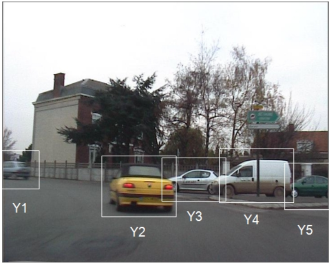
1. Mécanismes de correction de fonctions de croyance
2. Décompositions canoniques d'une fonction de croyance et affaiblissement contextuel
3. Association d'objets avec des fonctions de croyance

Plan

LGI2A

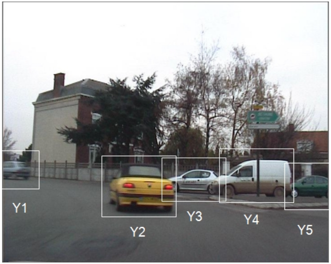
UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Description du problème

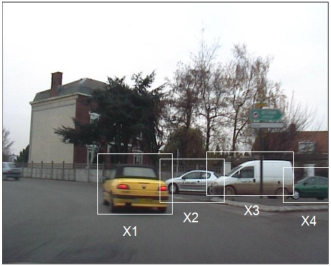


Véhicules détectés au temps *t* (objets connus)

Description du problème

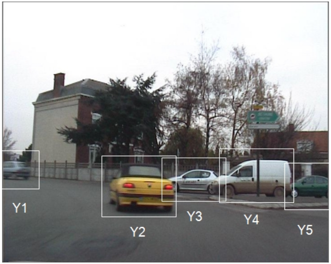


Véhicules détectés au temps t (objets connus)

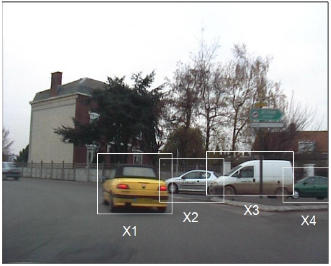


Véhicules détectés au temps $t+1$ (objets perçus)

Description du problème



Véhicules détectés au temps t (objets connus)



Véhicules détectés au temps $t+1$ (objets perçus)

Question :

- Quelles sont les relations entre les objets perçus et connus ?

LGI2A
UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Informations disponibles

- Des informations incertaines et imprécises au regard de l'association entre chaque objet perçu X_i et chaque objet connu Y_j.
- Exemple :
  - L'object X_1 correspond à l'objet Y_2 avec un certain degré de croyance…
  - En pratique, ces informations sont obtenues à partir de différents capteurs : angle, distance, …

Informations disponibles

- Des informations incertaines et imprécises au regard de l'association entre chaque objet perçu X_i et chaque objet connu Y_j.
- Exemple :
  - L'object X_1 correspond à l'objet Y_2 avec un certain degré de croyance…
  - En pratique, ces informations sont obtenues à partir de différents capteurs : angle, distance, …
- Modélisation avec des fonctions de croyance.

Modélisation

- Cadres de discernement en jeu :
  - $\Omega_{i,j} = \{y_{i,j}, n_{i,j}\}$: deux réponses possibles (yes or no) à la question “L'objet perçu X_i est-il associé à l'objet connu Y_j ?” ;
  - $\Omega_{X_i} = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_M, \star\} = \{1, 2, \dots, M, \star\}$: réponses à la question “Quel objet connu est associé à l'objet perçu X_i ?”, la proposition “$\star$” signifiant un objet inconnu.

Modélisation

- Cadres de discernement en jeu :
  - $\Omega_{i,j} = \{y_{i,j}, n_{i,j}\}$: deux réponses possibles (yes or no) à la question "L'objet perçu X_i est-il associé à l'objet connu Y_j ?" ;
  - $\Omega_{X_i} = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_M, \star\} = \{1, 2, \ldots, M, \star\}$: réponses à la question "Quel objet connu est associé à l'objet perçu X_i ?", la proposition "$\star$" signifiant un objet inconnu.
- Algorithme :
  - Exprimer chaque information $m^{\Omega_{i,j}}$ sur le cadre commun Ω_{X_i} : $m^{\Omega_{i,j}\uparrow\Omega_{X_i}}$, noté $m_j^{\Omega_{X_i}}$;
  - Combiner conjonctivement ces masses. Notons $m^{\Omega_{X_i}}$ le résultat ;
  - Décision choisie = l'association maximisant la probabilité $BetP^{\Omega_{X_1}\times\ldots\times\Omega_{X_N}}$ (et vérifiant des contraintes d'association).

LGI2A
UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Exemple 1/2

1 objet perçu X_1 et objets connus Y_1 et Y_2 t.q. :

$$\begin{cases} m^{\Omega_{1,1}}(\{y_{1,1}\}) = .2 \\ m^{\Omega_{1,1}}(\{n_{1,1}\}) = .45 \\ m^{\Omega_{1,1}}(\Omega_{1,1}) = .35 \end{cases} \qquad \begin{cases} m^{\Omega_{1,2}}(\{y_{1,2}\}) = .45 \\ m^{\Omega_{1,2}}(\{n_{1,2}\}) = .15 \\ m^{\Omega_{1,2}}(\Omega_{1,2}) = .4 \end{cases}$$

Exemple 1/2

1 objet perçu X_1 et objets connus Y_1 et Y_2 t.q. :

$$\begin{cases} m^{\Omega_{1,1}}(\{y_{1,1}\}) &= .2 \\ m^{\Omega_{1,1}}(\{n_{1,1}\}) &= .45 \\ m^{\Omega_{1,1}}(\Omega_{1,1}) &= .35 \end{cases} \qquad \begin{cases} m^{\Omega_{1,2}}(\{y_{1,2}\}) &= .45 \\ m^{\Omega_{1,2}}(\{n_{1,2}\}) &= .15 \\ m^{\Omega_{1,2}}(\Omega_{1,2}) &= .4 \end{cases}$$

Expression des informations sur Ω_{X_1} :

$$\begin{cases} m_1^{\Omega_{X_1}}(\{1\}) &= .2 \\ m_1^{\Omega_{X_1}}(\overline{\{1\}}) &= .45 \\ m_1^{\Omega_{X_1}}(\Omega_{X_1}) &= .35 \end{cases} \qquad \begin{cases} m_2^{\Omega_{X_1}}(\{2\}) &= .45 \\ m_2^{\Omega_{X_1}}(\overline{\{2\}}) &= .15 \\ m_2^{\Omega_{X_1}}(\Omega_{X_1}) &= .4 \end{cases}$$

Exemple

1 objet perçu X_1 et objets connus Y_1 et Y_2 t.q. :

$$\begin{cases} m^{\Omega_{1,1}}(\{y_{1,1}\}) = .2 \\ m^{\Omega_{1,1}}(\{n_{1,1}\}) = .45 \\ m^{\Omega_{1,1}}(\Omega_{1,1}) = .35 \end{cases} \quad \begin{cases} m^{\Omega_{1,2}}(\{y_{1,2}\}) = .45 \\ m^{\Omega_{1,2}}(\{n_{1,2}\}) = .15 \\ m^{\Omega_{1,2}}(\Omega_{1,2}) = .4 \end{cases}$$

Expression des informations sur Ω_{X_1} :

$$\begin{cases} m_1^{\Omega_{X_1}}(\{1\}) = .2 \\ m_1^{\Omega_{X_1}}(\overline{\{1\}}) = .45 \\ m_1^{\Omega_{X_1}}(\Omega_{X_1}) = .35 \end{cases} \quad \begin{cases} m_2^{\Omega_{X_1}}(\{2\}) = .45 \\ m_2^{\Omega_{X_1}}(\overline{\{2\}}) = .15 \\ m_2^{\Omega_{X_1}}(\Omega_{X_1}) = .4 \end{cases}$$

Après la RCC :

A	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{\star\}$	$\{1,\star\}$	$\{2,\star\}$	$\{1,2,\star\}$
$m^{\Omega_{X_1}}(A)$	.09	.11	.36	.07	.05	.18	.14
$BetP^{\Omega_{X_1}}(A)$		.20	.55	.25			

Exemple 1/2

1 objet perçu X_1 et objets connus Y_1 et Y_2 t.q. :

$$\begin{cases} m^{\Omega_{1,1}}(\{y_{1,1}\}) = .2 \\ m^{\Omega_{1,1}}(\{n_{1,1}\}) = .45 \\ m^{\Omega_{1,1}}(\Omega_{1,1}) = .35 \end{cases} \quad \begin{cases} m^{\Omega_{1,2}}(\{y_{1,2}\}) = .45 \\ m^{\Omega_{1,2}}(\{n_{1,2}\}) = .15 \\ m^{\Omega_{1,2}}(\Omega_{1,2}) = .4 \end{cases}$$

Expression des informations sur Ω_{X_1} :

$$\begin{cases} m_1^{\Omega_{X_1}}(\{1\}) = .2 \\ m_1^{\Omega_{X_1}}(\overline{\{1\}}) = .45 \\ m_1^{\Omega_{X_1}}(\Omega_{X_1}) = .35 \end{cases} \quad \begin{cases} m_2^{\Omega_{X_1}}(\{2\}) = .45 \\ m_2^{\Omega_{X_1}}(\overline{\{2\}}) = .15 \\ m_2^{\Omega_{X_1}}(\Omega_{X_1}) = .4 \end{cases}$$

Après la RCC :

A	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{\star\}$	$\{1,\star\}$	$\{2,\star\}$	$\{1,2,\star\}$
$m^{\Omega_{X_1}}(A)$	.09	.11	.36	.07	.05	.18	.14
$BetP^{\Omega_{X_1}}(A)$		.20	.55	.25			

Conclusion : X_1 **est associé à** Y_2, Y_1 **a disparu.**

LGI2A

UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Exemple 2/2

D'un autre côté : aussi possible d'exprimer les informations sur Ω_{Y_1} et Ω_{Y_2} :

$$\begin{cases} m_1^{\Omega_{Y_1}}(\{1\}) & = .2 \\ m_1^{\Omega_{Y_1}}(\overline{\{1\}}) & = .45 \\ m_1^{\Omega_{Y_1}}(\Omega_{Y_1}) & = .35 \end{cases} \qquad \begin{cases} m_1^{\Omega_{Y_2}}(\{1\}) & = .45 \\ m_1^{\Omega_{Y_2}}(\overline{\{1\}}) & = .15 \\ m_1^{\Omega_{Y_2}}(\Omega_{Y_2}) & = .4 \end{cases}$$

Exemple 2/2

D'un autre côté : aussi possible d'exprimer les informations sur Ω_{Y_1} et Ω_{Y_2} :

$$\begin{cases} m_1^{\Omega_{Y_1}}(\{1\}) & = .2 \\ m_1^{\Omega_{Y_1}}(\overline{\{1\}}) & = .45 \\ m_1^{\Omega_{Y_1}}(\Omega_{Y_1}) & = .35 \end{cases} \qquad \begin{cases} m_1^{\Omega_{Y_2}}(\{1\}) & = .45 \\ m_1^{\Omega_{Y_2}}(\overline{\{1\}}) & = .15 \\ m_1^{\Omega_{Y_2}}(\Omega_{Y_2}) & = .4 \end{cases}$$

A	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{\star\}$	$\{1,\star\}$
$m^{\Omega_{Y_1}}(A)$		.2	.45	.35
$BetP^{\Omega_{Y_1}}(A)$		.375	.625	1
$m^{\Omega_{Y_2}}(A)$		.45	.15	.4
$BetP^{\Omega_{Y_2}}(A)$		.65	.35	1

- $BetP^{\Omega_{Y_1}\times\Omega_{Y_2}}(\{1,\star\}) = .375 \times .35 = .131$;
- $BetP^{\Omega_{Y_1}\times\Omega_{Y_2}}(\{\star,1\}) = .625 \times .65 = .406$;
- $BetP^{\Omega_{Y_1}\times\Omega_{Y_2}}(\{\star,\star\}) = .625 \times .35 = .219$,

LGI2A
UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Exemple 2/2

D'un autre côté : aussi possible d'exprimer les informations sur Ω_{Y_1} et Ω_{Y_2} :

$$\begin{cases} m_1^{\Omega_{Y_1}}(\{1\}) & = .2 \\ m_1^{\Omega_{Y_1}}(\overline{\{1\}}) & = .45 \\ m_1^{\Omega_{Y_1}}(\Omega_{Y_1}) & = .35 \end{cases} \qquad \begin{cases} m_1^{\Omega_{Y_2}}(\{1\}) & = .45 \\ m_1^{\Omega_{Y_2}}(\overline{\{1\}}) & = .15 \\ m_1^{\Omega_{Y_2}}(\Omega_{Y_2}) & = .4 \end{cases}$$

A	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{\star\}$	$\{1,\star\}$
$m^{\Omega_{Y_1}}(A)$		.2	.45	.35
$BetP^{\Omega_{Y_1}}(A)$		.375	.625	1
$m^{\Omega_{Y_2}}(A)$		.45	.15	.4
$BetP^{\Omega_{Y_2}}(A)$		.65	.35	1

- $BetP^{\Omega_{Y_1}\times\Omega_{Y_2}}(\{1,\star\}) = .375 \times .35 = .131$;
- $BetP^{\Omega_{Y_1}\times\Omega_{Y_2}}(\{\star,1\}) = .625 \times .65 = .406$;
- $BetP^{\Omega_{Y_1}\times\Omega_{Y_2}}(\{\star,\star\}) = .625 \times .35 = .219$,

Conclusion : X_1 **est associé à** Y_2, Y_1 **a disparu.** (Même résultat)

Exemple

2/2

D'un autre côté : aussi possible d'exprimer les informations sur Ω_{Y_1} et Ω_{Y_2} :

$$\left\{\begin{array}{ll} m_1^{\Omega_{Y_1}}(\{1\}) & = .2 \\ m_1^{\Omega_{Y_1}}(\overline{\{1\}}) & = .45 \\ m_1^{\Omega_{Y_1}}(\Omega_{Y_1}) & = .35 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{ll} m_1^{\Omega_{Y_2}}(\{1\}) & = .45 \\ m_1^{\Omega_{Y_2}}(\overline{\{1\}}) & = .15 \\ m_1^{\Omega_{Y_2}}(\Omega_{Y_2}) & = .4 \end{array}\right.$$

A	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{\star\}$	$\{1,\star\}$
$m^{\Omega_{Y_1}}(A)$		.2	.45	.35
$BetP^{\Omega_{Y_1}}(A)$		.375	.625	1
$m^{\Omega_{Y_2}}(A)$		.45	.15	.4
$BetP^{\Omega_{Y_2}}(A)$		.65	.35	1

- $BetP^{\Omega_{Y_1}\times\Omega_{Y_2}}(\{1,\star\}) = .375 \times .35 = .131$;
- $BetP^{\Omega_{Y_1}\times\Omega_{Y_2}}(\{\star,1\}) = .625 \times .65 = .406$;
- $BetP^{\Omega_{Y_1}\times\Omega_{Y_2}}(\{\star,\star\}) = .625 \times .35 = .219$,

Conclusion : X_1 **est associé à** Y_2, Y_1 **a disparu.** (Même résultat)

Mais ce n'est pas toujours le cas… (sick)

Fin

Merci de votre attention