

Fusion d'informations imparfaites

David Mercier

Laboratoire de Génie Informatique et d'Automatique de l'Artois (LGI2A)

Petit déjeuner scientifique, 31 mars 2009



UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Information : principales formes d'imperfection

L'incertitude

- ▶ Relative à la vérité d'une proposition ;
- ▶ Ex : « Je crois que Jean mesure 1,5 mètre ».

Information : principales formes d'imperfection

L'incertitude

- ▶ Relative à la vérité d'une proposition ;
- ▶ Ex : « Je crois que Jean mesure 1,5 mètre ».

L'imprécision

- ▶ Relative à la nature d'une proposition ;
- ▶ Ex : « Jean mesure entre 1,5 mètre et 2 mètres ».

Information : principales formes d'imperfection

L'incertitude

- ▶ Relative à la vérité d'une proposition ;
- ▶ Ex : « Je crois que Jean mesure 1,5 mètre ».

L'imprécision

- ▶ Relative à la nature d'une proposition ;
- ▶ Ex : « Jean mesure entre 1,5 mètre et 2 mètres ».

L'ambiguïté

- ▶ Passage graduel d'une catégorie à une autre.
- ▶ Ex : langage courant : « Jean est grand ».
- ▶ Ex : phénomènes naturels : le passage graduel du jour et de la nuit, la maturation d'un fruit.

Fusion d'informations

Objectif

Exploiter conjointement plusieurs informations imparfaites afin d'améliorer la prise de décision.

Fusion d'informations

Objectif

Exploiter conjointement plusieurs informations imparfaites afin d'améliorer la prise de décision.

Source 1 : « Je crois que Jean mesure 1,5 mètre »

Source 2 : « Jean mesure entre 1,5 mètre et 2 mètres »

Source 3 : « Jean est grand »

Fusion d'informations

Objectif

Exploiter conjointement plusieurs informations imparfaites afin d'améliorer la prise de décision.

Source 1 : « Je crois que Jean mesure 1,5 mètre »

Source 2 : « Jean mesure entre 1,5 mètre et 2 mètres »

Source 3 : « Jean est grand »

Après Fusion : Jean est ?

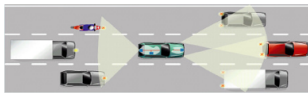
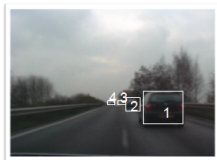
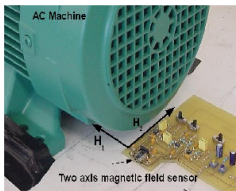
Plan

- 1 Introduction
- 2 Exemples d'applications développées au sein du LGI2A
- 3 Introduction à la théorie des fonctions de croyance

Plan

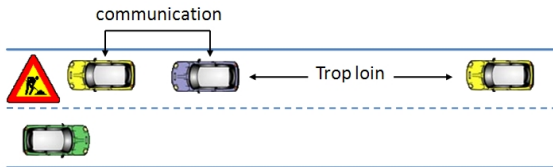
- 1 Introduction
- 2 Exemples d'applications développées au sein du LGI2A
- 3 Introduction à la théorie des fonctions de croyance

Nombreuses applications développées au sein du LGI2A



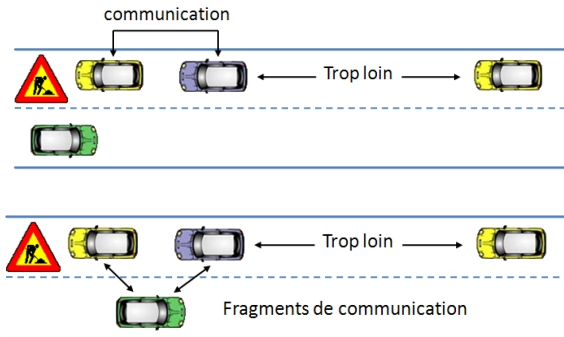
Communication inter-véhicules

Collaboration avec le LAMIH - UVHC (Projet régional CISIT 2007-2013)



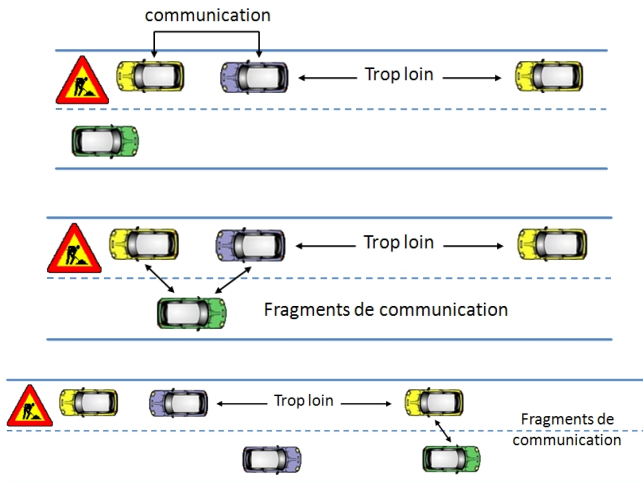
Communication inter-véhicules

Collaboration avec le LAMIH - UVHC (Projet régional CISIT 2007-2013)



Communication inter-véhicules

Collaboration avec le LAMIH - UVHC (Projet régional CISIT 2007-2013)



Plan

- 1 Introduction
- 2 Exemples d'applications développées au sein du LGI2A
- 3 Introduction à la théorie des fonctions de croyance

Plan

- 1 Introduction
- 2 Exemples d'applications développées au sein du LGI2A
- 3 Introduction à la théorie des fonctions de croyance**

Exemple : une course hippique

« Le tiercé c'est mon dada » (O. Sharif)

- ▶ Trois chevaux : c_1 , c_2 , c_3 .
- ▶ Question : « qui va gagner la course ? »
- ▶ Expert 1 : « Les trois chevaux sont de même niveau. »
- ▶ Expert 2 : « Aucune idée. »



Le Derby d'Epsom (Géricault)

Exemple : une course hippique

« Le tiercé c'est mon dada » (O. Sharif)

- ▶ Trois chevaux : c_1 , c_2 , c_3 .
- ▶ Question : « qui va gagner la course ? »
- ▶ Expert 1 : « Les trois chevaux sont de même niveau. »
- ▶ Expert 2 : « Aucune idée. »



Le Derby d'Epsom (Géricault)

Modélisation du problème dans un cadre probabiliste :

Exemple : une course hippique

« Le tiercé c'est mon dada » (O. Sharif)

- ▶ Trois chevaux : c_1 , c_2 , c_3 .
- ▶ Question : « qui va gagner la course ? »
- ▶ **Expert 1** : « Les trois chevaux sont de même niveau. »
- ▶ **Expert 2** : « Aucune idée. »



Le Derby d'Epsom (Géricault)

Modélisation du problème dans un cadre probabiliste :

- ▶ **Expert 1** : $p_1(c_1) = p_1(c_2) = p_1(c_3) = \frac{1}{3}$

Exemple : une course hippique

« Le tiercé c'est mon dada » (O. Sharif)

- ▶ Trois chevaux : c_1 , c_2 , c_3 .
- ▶ Question : « qui va gagner la course ? »
- ▶ **Expert 1** : « Les trois chevaux sont de même niveau. »
- ▶ **Expert 2** : « Aucune idée. »



Le Derby d'Epsom (Géricault)

Modélisation du problème dans un cadre probabiliste :

- ▶ **Expert 1** : $p_1(c_1) = p_1(c_2) = p_1(c_3) = \frac{1}{3}$
- ▶ **Expert 2** : $p_2(c_1) = p_2(c_2) = p_2(c_3) = \frac{1}{3}$ (principe de raisonnement insuffisant (PRI))

Exemple : une course hippique

« Le tiercé c'est mon dada » (O. Sharif)

- ▶ Trois chevaux : c_1, c_2, c_3 .
- ▶ Question : « qui va gagner la course ? »
- ▶ **Expert 1** : « Les trois chevaux sont de même niveau. »
- ▶ **Expert 2** : « Aucune idée. »



Le Derby d'Epsom (Géricault)

Modélisation du problème dans un cadre probabiliste :

- ▶ **Expert 1** : $p_1(c_1) = p_1(c_2) = p_1(c_3) = \frac{1}{3}$
- ▶ **Expert 2** : $p_2(c_1) = p_2(c_2) = p_2(c_3) = \frac{1}{3}$ (principe de raisonnement insuffisant (PRI))

Problème : deux opinions différentes, **équiprobabilité** et **incertitude totale**, sont représentées de la même façon.

Théorie des fonctions de croyance

Théorie de Dempster-Shafer

- Besoin d'une théorie plus riche, plus flexible pour modéliser l'ignorance et l'arbitraire.

Théorie des fonctions de croyance

Théorie de Dempster-Shafer

- Besoin d'une théorie plus riche, plus flexible pour modéliser l'ignorance et l'arbitraire.
- Théorie employée : théorie des fonctions de croyance de Dempster-shafer.

Fonction de masse de croyance

Définition

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_K\}$: ensemble fini de réponses à une certaine question Q d'intérêt.

Définition (fonction de masse)

Une fonction de masse de croyance sur Ω est une application $m : 2^\Omega \rightarrow [0, 1]$ t.q.

$$\sum_{A \subseteq \Omega} m(A) = 1.$$

Tout $A \subseteq \Omega$, $m(A) > 0$ est appelé élément focal (EF) de m .

Fonction de masse de croyance

Interprétation

La fonction de masse m représente :

- ▶ l'**état de connaissance** d'un agent rationnel à un certain instant t , relativement à Q .

Fonction de masse de croyance

Interprétation

La fonction de masse m représente :

- ▶ l'**état de connaissance** d'un agent rationnel à un certain instant t , relativement à Q .

Masse $m(A)$: part de croyance allouée à A (et à aucun sous-ensemble strict).

Fonction de masse de croyance

Interprétation

La fonction de masse m représente :

- ▶ l'**état de connaissance** d'un agent rationnel à un certain instant t , relativement à Q .

Masse $m(A)$: part de croyance allouée à A (et à aucun sous-ensemble strict).

Masse $m(\Omega)$: degré d'ignorance totale.

Fonction de masse de croyance

Interprétation

La fonction de masse m représente :

- ▶ l'**état de connaissance** d'un agent rationnel à un certain instant t , relativement à Q .

Masse $m(A)$: part de croyance allouée à A (et à aucun sous-ensemble strict).

Masse $m(\Omega)$: degré d'ignorance totale.

Résumé :

- ▶ fonction de masse de croyance = **opinion pondérée** ;
- ▶ à chaque alternative du monde est associé un nombre entre 0 et 1.

Retour sur l'exemple de la course hippique

« Si vous avez perdu au tiercé, vengez-vous. Mangez du cheval. » (P. Dac)

- ▶ Trois chevaux : c_1 , c_2 , c_3 .
- ▶ Question : « qui va gagner la course ? »
- ▶ **Expert 1** : « Les trois chevaux sont de même niveau. »
- ▶ **Expert 2** : « Aucune idée. »



Le Derby d'Epsom (Géricault)

Retour sur l'exemple de la course hippique

« Si vous avez perdu au tiercé, vengez-vous. Mangez du cheval. » (P. Dac)

- ▶ Trois chevaux : c_1 , c_2 , c_3 .
- ▶ Question : « qui va gagner la course ? »
- ▶ **Expert 1** : « Les trois chevaux sont de même niveau. »
- ▶ **Expert 2** : « Aucune idée. »



Le Derby d'Epsom (Géricault)

Modélisation dans le cadre des fonctions de croyance :

Retour sur l'exemple de la course hippique

« Si vous avez perdu au tiercé, vengez-vous. Mangez du cheval. » (P. Dac)

- ▶ Trois chevaux : c_1 , c_2 , c_3 .
- ▶ Question : « qui va gagner la course ? »
- ▶ **Expert 1** : « Les trois chevaux sont de même niveau. »
- ▶ **Expert 2** : « Aucune idée. »



Le Derby d'Epsom (Géricault)

Modélisation dans le cadre des fonctions de croyance :

- ▶ **Expert 1** : $m_1(\{c_1\}) = m_1(\{c_2\}) = m_1(\{c_3\}) = \frac{1}{3}$

Retour sur l'exemple de la course hippique

« Si vous avez perdu au tiercé, vengez-vous. Mangez du cheval. » (P. Dac)

- ▶ Trois chevaux : c_1 , c_2 , c_3 .
- ▶ Question : « qui va gagner la course ? »
- ▶ Expert 1 : « Les trois chevaux sont de même niveau. »
- ▶ Expert 2 : « Aucune idée. »



Le Derby d'Epsom (Géricault)

Modélisation dans le cadre des fonctions de croyance :

- ▶ Expert 1 : $m_1(\{c_1\}) = m_1(\{c_2\}) = m_1(\{c_3\}) = \frac{1}{3}$
- ▶ Expert 2 : $m_2(\{c_1, c_2, c_3\}) = 1$

Exemple

The Peter, Paul and Mary Saga (Smets)

Problème

Un juge sait ceci :

- ▶ Big Boss a décidé que M. Jones devait mourir ;
- ▶ 3 tueurs possibles : Peter, Paul, Mary ;
- ▶ Big Boss désigne à pile ou face le sexe du tueur (pièce non truquée) ;
- ▶ Aucune idée sur le choix entre Peter et Paul, dans le cas où un homme est choisi ;
- ▶ M. Jones est tué par un tueur de Big Boss.

Exemple

The Peter, Paul and Mary Saga (Smets)

Problème

Un juge sait ceci :

- ▶ Big Boss a décidé que M. Jones devait mourir ;
- ▶ 3 tueurs possibles : Peter, Paul, Mary ;
- ▶ Big Boss désigne à pile ou face le sexe du tueur (pièce non truquée) ;
- ▶ Aucune idée sur le choix entre Peter et Paul, dans le cas où un homme est choisi ;
- ▶ M. Jones est tué par un tueur de Big Boss.

Question : « qui a tué M. Jones ? »

Exemple

The Peter, Paul and Mary Saga (Smets)

Problème

Un juge sait ceci :

- ▶ Big Boss a décidé que M. Jones devait mourir ;
- ▶ 3 tueurs possibles : Peter, Paul, Mary ;
- ▶ Big Boss désigne à pile ou face le sexe du tueur (pièce non truquée) ;
- ▶ Aucune idée sur le choix entre Peter et Paul, dans le cas où un homme est choisi ;
- ▶ M. Jones est tué par un tueur de Big Boss.

Question : « qui a tué M. Jones ? »

Modélisation dans cadre crédibiliste

k , le tueur, $\in \Omega = \{Peter, Paul, Mary\}$;

Exemple

The Peter, Paul and Mary Saga (Smets)

Problème

Un juge sait ceci :

- ▶ Big Boss a décidé que M. Jones devait mourir ;
- ▶ 3 tueurs possibles : Peter, Paul, Mary ;
- ▶ Big Boss désigne à pile ou face le sexe du tueur (pièce non truquée) ;
- ▶ Aucune idée sur le choix entre Peter et Paul, dans le cas où un homme est choisi ;
- ▶ M. Jones est tué par un tueur de Big Boss.

Question : « qui a tué M. Jones ? »

Modélisation dans cadre crédibiliste

k , le tueur, $\in \Omega = \{Peter, Paul, Mary\}$;

$m(\{Peter, Paul\}) = 0.5$ et $m(\{Mary\}) = 0.5$.

Exemple de fusion : combinaison conjonctive

- Soient deux fonctions de masse m_1 et m_2 issues de deux sources d'informations **fiables** et **distinctes**.
- Somme conjonctive :

$$m_1 \odot_2 m_2(A) = m_1 \odot m_2(A) = \sum_{B \cap C = A} m_1(B) m_2(C), \quad \forall A \subseteq \Omega$$

Exemple de fusion : combinaison conjonctive

- Soient deux fonctions de masse m_1 et m_2 issues de deux sources d'informations **fiables** et **distinctes**.
- Somme conjonctive :

$$m_1 \odot_2 m_2(A) = m_1 \odot m_2(A) = \sum_{B \cap C = A} m_1(B) m_2(C), \quad \forall A \subseteq \Omega$$

- Exemple : $\Omega = \{a, b, c\}$, $m_1(\{a, b\}) = 0.5$ et $m_1(\{c\}) = 0.5$, $m_2(\Omega) = 0.4$ et $m_2(\{a, c\}) = 0.6$.

$m_1 \setminus m_2$	$\Omega (.4)$	$\{a, c\} (.6)$
$\{a, b\} (.5)$	$\{a, b\} (.5 \times .4 = .2)$	$\{a\} (.5 \times .6 = .3)$
$\{c\} (.5)$	$\{c\} (.5 \times .4 = .2)$	$\{c\} (.5 \times .6 = .3)$

Exemple de fusion : combinaison conjonctive

- Soient deux fonctions de masse m_1 et m_2 issues de deux sources d'informations **fiables** et **distinctes**.
- Somme conjonctive :

$$m_1 \odot_2 m_2(A) = m_1 \odot m_2(A) = \sum_{B \cap C = A} m_1(B) m_2(C), \quad \forall A \subseteq \Omega$$

- Exemple : $\Omega = \{a, b, c\}$, $m_1(\{a, b\}) = 0.5$ et $m_1(\{c\}) = 0.5$, $m_2(\Omega) = 0.4$ et $m_2(\{a, c\}) = 0.6$.

$m_1 \setminus m_2$	$\Omega (.4)$	$\{a, c\} (.6)$
$\{a, b\} (.5)$	$\{a, b\} (.5 \times .4 = .2)$	$\{a\} (.5 \times .6 = .3)$
$\{c\} (.5)$	$\{c\} (.5 \times .4 = .2)$	$\{c\} (.5 \times .6 = .3)$

$$m_1 \odot_2(\{a, b\}) = .2, m_1 \odot_2(\{a\}) = .3, m_1 \odot_2(\{c\}) = .5,$$

Fin...

Merci de votre attention,



UNIVERSITÉ D'ARTOIS



Bibliographie



G. Shafer.

A mathematical theory of evidence.

Princeton University Press, 1976.



P. Smets.

[http://iridia.ulb.ac.be/~psmets
articles](http://iridia.ulb.ac.be/~psmets/articles) (1994,1998,2005).



T. Denœux.

[http://www.hds.utc.fr/~tdenoeux
articles et exposés.](http://www.hds.utc.fr/~tdenoeux/articles_et_exposes)

Paradoxe de Bertrand

Exemple d'un problème issu du principe de raisonnement insuffisant (PRI)

(1/2)

Soit une bouteille contenant un mélange d'eau et de vin.

La bouteille contient :

- ▶ au moins autant d'eau que de vin,
- ▶ au plus deux fois plus d'eau que de vin.

Question : « quelle est la probabilité que la bouteille contienne au plus 1.5 fois plus d'eau que de vin ? »



bouteille SLOM IKEA®
(1,5€ prix maximum)

G12A



UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Paradoxe de Bertrand

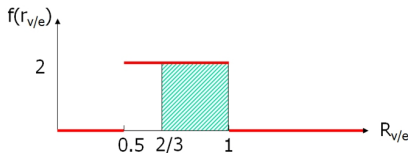
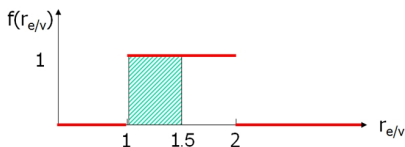
Exemple d'un problème issu du principe de raisonnement insuffisant (PRI) (2/2)

Avec $r_{e/v}$ le rapport eau sur vin :

- ▶ $1 \leq r_{e/v} \leq 2$;
- ▶ PRI : loi de probabilité uniforme sur $[1, 2]$;
- ▶ $P(r_{e/v} \leq 1.5) = 0.5$.

Avec $r_{v/e}$ le rapport vin sur eau :

- ▶ $1 \leq r_{e/v} \leq 2 \Leftrightarrow 0.5 \leq r_{v/e} \leq 1$;
- ▶ PRI : loi de probabilité uniforme sur $[\frac{1}{2}, 1]$;
- ▶ $r_{e/v} \leq 1.5 \Leftrightarrow r_{v/e} \geq \frac{2}{3}$;
- ▶ $P(r_{e/v} \leq 1.5) = P(r_{v/e} \geq \frac{2}{3}) = \frac{1}{3}$, contradiction.

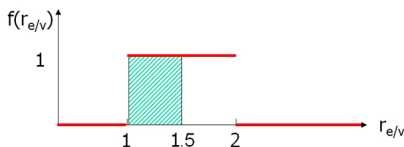


Paradoxe de Bertrand

Exemple d'un problème issu du principe de raisonnement insuffisant (PRI) (2/2)

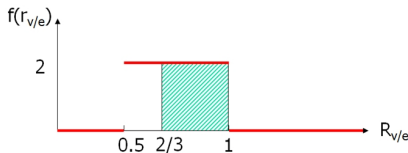
Avec $r_{e/v}$ le rapport eau sur vin :

- ▶ $1 \leq r_{e/v} \leq 2$;
- ▶ PRI : loi de probabilité uniforme sur $[1, 2]$;
- ▶ $P(r_{e/v} \leq 1.5) = 0.5$.



Avec $r_{v/e}$ le rapport vin sur eau :

- ▶ $1 \leq r_{e/v} \leq 2 \Leftrightarrow 0.5 \leq r_{v/e} \leq 1$;
- ▶ PRI : loi de probabilité uniforme sur $[\frac{1}{2}, 1]$;
- ▶ $r_{e/v} \leq 1.5 \Leftrightarrow r_{v/e} \geq \frac{2}{3}$;
- ▶ $P(r_{e/v} \leq 1.5) =$
 $P(r_{v/e} \geq \frac{2}{3}) = \frac{1}{3}$, contradiction.



⇒ **Besoin d'une théorie plus riche, plus flexible pour modéliser l'ignorance et l'arbitraire.**